第一届刘勰杯初中数学奥林匹克竞赛

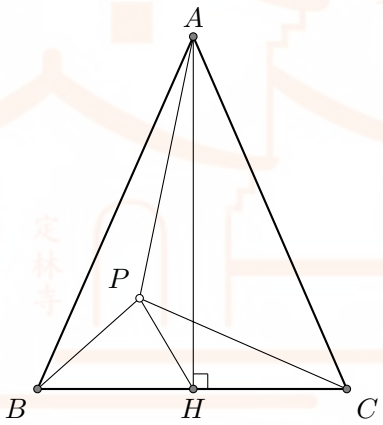
2025 年 8 月 9 日，星期六

第 1 次测试

第 1 题 求所有三元质数组 (x, y, z)，使得

$$z^2 - xy = 4$$

第 2 题 已知 $\triangle ABC$ 是等腰三角形，$AB = AC$，$AH \perp BC$ 交 BC 于点 H，P 是 $\triangle ABC$ 内部一点，且 $\angle PBC = \angle PCA$，求证：$\angle APB + \angle CPH = 180°$.



第 3 题 已知关于 x 的方程满足

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} + \sqrt{x+3} + \sqrt{x+4} = 15$$

求 x 的整数部分.

第 4 题 小岩同学玩一个取球游戏，从 n 个标号分别为 $1, 2, \cdots, n$ 的小球中取球，每轮游戏取 i 个球 (其中 $1 \leqslant i \leqslant n$)，每轮游戏取法均不相同且取后球放回，且每轮使得取出的球中标号最小值与最大值之和恰好为 $n+1$，一直玩到无法继续游戏为止，记 $f(n)$ 为小岩同学最终玩的总轮数，求 $f(n)$ 的表达式.

时间：**2** 小时 **30** 分
每题 **15** 分

第 2 次测试

第 5 题 已知 x, y, z 为实数，解关于 x, y, z 的方程组：

$$\begin{cases} xz + yz - z^2 = 2 \\ xy + yz - y^2 = 3 \\ xy + xz - x^2 = 4 \end{cases}$$

第 6 题 求证：当 $t \leqslant 7$ 或 $t \geqslant 8$ 时，$5^{t-5} < 2^{t-2}$ 与 $5^{t-5} > 3^{t-3}$ 不能同时成立.

第 7 题 2025 个盒子排成一排，从左到右依次编号为 $1, 2, \cdots, 2025$. 初始时，每个盒子中恰好有 1 枚硬币. 现在允许进行以下操作：

- 任选两个相邻的盒子，设它们当前的硬币数分别为 a 和 b，然后将这两个盒子中的硬币数分别变为 $a+1$、$b-1$ 或 $a-1$、$b+1$(注：操作后每个盒子的硬币数必须为非负整数).

问：是否能通过奇数次操作使得所有硬币都集中到编号为 1013 的盒子中？即编号 1013 的盒子有 2025 枚硬币，其余盒子有 0 枚硬币. 若能，给出可行的方案，若不能，请说明理由.

第 8 题 在凸四边形 $ABCD$ 中，$AC \perp BD$ 交 BD 于点 O，$\odot(AOB)$ 交 $\odot(COD)$ 于点 P(异于点 O)，$\odot(AOB)$ 交 CB 延长线于点 E，延长 EO 交 $\odot(COD)$ 于点 K，AC、BD、EK 中点分别为 M、N、S. 求证：O、P、N、S、M 五点共圆.

